Endomorphisme ou matrice diagonalisable

Pour déterminer dans la pratique si un endomorphisme d'un **K**-espace vectoriel de type fini ou une matrice de $M_n(\mathbf{K})$ est diagonalisable on peut procéder de la façon suivante :

Actions	Outils
Calculer le polynôme caractéristique.	Calcul d'un déterminant dépendant d'un paramètre en le factorisant.
Déterminer ses racines dans **K** et leur ordre de multiplicité. Décider si le polynôme caractéristique est ou non scindé dans **K**.	Factorisation d'un polynôme en des polynômes à coefficients dans **K**.
Si la réponse est non, s'arrêter. Si la réponse est oui, continuer.	La condition **nécessaire et suffisante**(*) de diagonalisation faisant intervenir le polynôme caractéristique.
Chercher la dimension des sous-espaces propres relatifs aux valeurs propres multiples s'il y en a *(on sait d'avance que la dimension des sous-espaces propres relatifs aux valeurs propres simples est égale à 1).*	Résolution de systèmes linéaires par la méthode du Pivot de Gauss *(on sait d'avance que les systèmes considérés ne sont pas de Cramer).*
Dire si l'endomorphisme ou la matrice est diagonalisable en utilisant le théorème.	La condition **nécessaire et suffisante**(*) de diagonalisation faisant intervenir le polynôme caractéristique.
Si l'endomorphisme ou la matrice est diagonalisable, déterminer une base de vecteurs propres. Pour cela il suffit d'avoir une base de chacun des sous-espaces propres. En effet, leur somme est directe et égale à *E*, donc la réunion de ces bases est une base de l'espace *E*. *En fait à ce stade il ne reste plus qu'à chercher une base pour les racines simples du polynôme caractéristique s'il y en a.*	Résolution de systèmes linéaires par la méthode du Pivot de Gauss *(on sait d'avance que les systèmes considérés ne sont pas de Cramer).*
L'étude est terminée : si l'endomorphisme (ou la matrice) est diagonalisable on a une base de vecteurs propres de *f* ou une matrice inversible *P* et une matrice diagonale *D* telle que $M = PDP^{-1}$.	

(*) **Théorème : condition nécessaire et suffisante de diagonalisation faisant intervenir le polynôme caractéristique**

Soit *f* un endomorphisme d'un **K**-espace vectoriel *E* de dimension *n*, (ou *M* une matrice carrée d'ordre *n* à coefficients dans **K**).

Pour que *f* (respectivement *M*) soit diagonalisable, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

(i) Le polynôme caractéristique de *f* (respectivement de *M*) se factorise en un produit de polynômes du premier degré (non nécessairement distincts) à coefficients dans **K**.

(ii) Pour chaque valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé **est égale** à son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.